# 初期配置と難易度を考慮した数独問題の自動生成

# Automatic Generation of Sudoku Puzzles by Considering Initial Placement and Difficulty

# 神尾 巧

#### Takumi Kamio

法政大学情報科学部ディジタルメディア学科 E-mail: Takumi.kamio.5r@stu.hosei.ac.jp

#### **Abstract**

Sudoku is a puzzle that requires to place numbers in a 9-by-9 grid so that there are no duplicates. Although Sudoku problems are usually created by humans, there have been studies on the automatic generation of Sudoku problems with computers. Especially, Zama et al. proposed a method for generating Sudoku problems of high difficulty from the initial arrangement of clues numbers. However, there was no research on the generation of Sudoku problems of specified difficulty. This paper proposes a method for generating Sudoku problems of specified difficulty from the initial arrangement of clue numbers. It introduces two measures from Ishida et al.'s work on Sudoku evaluation and defines the evaluation criteria based on their measures. It consists of two phases: first, in the generation phase, it places numbers by using the initial arrangement and adjusting the problem to the specified difficulty; second, in the replacement phase, it replaces numbers to complete the problem. Especially, the appropriateness of the problem for the specified difficulty is maximized in the generation phase and is adjusted in the replacement phase. The results of experiments show that the method could generate problems of appropriate difficulty in about 9 seconds and in the ratio of about 80% on average if the combination of the initial arrangement and difficulty is appropriate.

1. はじめに

数独(ナンバープレースとも呼ばれる)とは、重複が無いように9×9のマス目を数字で埋めるパズルである.数独の問題は基本的にはパズル作家など、人によって作成される.一方、数独をコンピューター上で自動的に生成する研究もおこなわれている.例えば、座間ら[1]はヒントとして始めから与えられている数字の配置を指定して高難易度の数独の問題を生成する研究をした.しかし、著者の知る限り、難易度を指定して数独の問題を生成した研究は存在しない.

本研究では、初期配置と難易度を指定することで、指 定された初期配置、かつ指定された難易度により近い難

易度の問題を自動的に生成する手法を提案する. 難易度 評価に関しては、石田ら[2]によって提案された数独の評 価基準から 2 つの尺度を導入し、それらの尺度を元に評 価基準を定義する. 市販の問題集の各問題に対して設定 されている難易度毎に 2 つの尺度を計測し、そのデータ から各難易度における 2 つの尺度の分布を計算する. 指 定された難易度の分布に、評価する問題の 2 つの尺度を 代入してその難易度の問題としての適切さを計算し、そ れらを評価値として座間らの手法に組み込む. 生成にあ たって, 初期配置に数字を配置していく生成段階で適切 さを最大化し,数字を置き換えて問題を完成させる入れ 替え段階で適切な難易度の問題になるように調整する. 実験では、いくつかの初期配置からそれぞれの難易度で 提案手法を用いて問題を生成する. 初期配置と難易度の 組み合わせによっては生成しにくい場合もあるが,適切 な組み合わせであれば平均 9 秒程度,約 80%の確率で適 切な難易度で生成できることを示す.

## 2. 関連研究

座間らは、数字の初期配置を指定して数独の問題を自動生成する手法を提案した [1]. その生成の過程は大きく2つの段階に分けられる. この論文ではその2つの段階をそれぞれ生成段階,入れ替え段階と呼ぶ. 生成段階では、初期配置に数字を配置する. 完成した初期配置で一意解が存在しなかった場合、入れ替え段階として初期配置の数字をいくつか置き換える. 石田らは数独の面白さの評価基準を提案した [2]. 石田らは解法適用レベルとステップ数という 2 つの数独問題の評価尺度を定義した. 解法適用レベルは問題の難しさ、ステップ数は問題を解くのにかかるおおまかな時間を計ることができる. 本研究の提案手法は主にこれらの 2 つの研究を基礎とする.

# 3. 準備

# 3.1. 数独とは

数独とは、 $9\times9$  のマス目を数字で埋めるパズルである. 数字を入れる際は、行(横1列)、列(縦1列)、ブロック(3 $\times$ 3 の小部屋)の中で数字が重複しないように配置しなければならない。数独の問題は最初からいくつかの数字がマスに入っており、それをヒントに問題を解き進める。本研究では、最初から与えられている数字の配置を**初期** 

Supervisor: Prof. Hiroshi Hosobe

配置と呼び,初期配置として指定されているマスを**初期** 配置マスと呼ぶ.

# 3.2. 推論規則

人が数独を解く際、あるマスに確実に入る数字や、確実に入らない数字をすでに入っている数字から推測する.この方法を推論規則と呼ぶ. 例えば Naked Single という推論規則では、あるマスの候補数字(そのマスに入りうる数字の組)が1つだけだった場合、その数字を入れる. 推論規則は様々な種類が存在し、人はこれらの推論規則を順に問題に適用しながら問題を解く. 本研究では各推論規則はHoDoKu [3]に準ずる.

# 3.2.1. 解法適用レベル

石田らは 8 つの推論規則をおおまかに複雑な順に並べ、各推論規則の複雑さとして 1~8 の整数を設定した.数独の問題を解く際は、まずそれらの推論規則のうち複雑さが最も低いものを問題の盤面に適用する.繰り返し適用していき、盤面が変化しなくなったが盤面が埋まっていない場合は次の難易度の推論規則を適用する.変化があった場合、また最も複雑さが低い推論規則から適用していく.これを盤面が埋まるまで繰り返す.その際、適用した推論規則のうち最も複雑な推論規則の複雑さを解法適用レベルと呼ぶ.例えば、解法適用レベルが 4 の問題があった場合、その問題は複雑さが 3 以下の推論規則のみでは解くことができず、複雑さが 4 の推論規則も併用すれば解くことができる問題である.この尺度により、問題のおおまかな難しさを計ることができる.

# 3.2.2. ステップ数

推論規則には数字を確定させるものと、候補数字を絞り込むものが存在する.人が数独を解く際は、候補数字を絞り込むことと、数字を確定させることとを繰り返す.石田らは、数字を確定させる推論規則を 1 つに絞り、それ以外の推論規則ではたとえ数字を確定させられる場合でもその時点では確定させないようにした.これにより、数字を確定させる推論規則を適用した回数をステップ数として定義することで、絞り込みと確定を繰り返す大まかな回数を測った.この尺度により、問題を解くのにかかるおおまかな時間を計ることができる.

# 3.3. 座間らの数独生成手法

#### 3.3.1. 生成段階

座間らの数独生成手法では、まず生成段階として、初期配置のマスに数字を配置していく。初期配置マスの候補数字のそれぞれについて、その数字を配置して解き進めた盤面の評価値を計算する。そして、評価値が最も良い候補数字を配置する。最良の評価値の候補数字が複数存在する場合はその中からランダムに配置する。また、配置して解き進めた結果、矛盾が発生した候補数字は候補から取り除く。この操作により候補数字が無くなるマスが出現した場合は、生成失敗として生成を始めからやり直す。これを初期配置マスが全て埋まるまで繰り返す。全て埋まった際、その数字配置が一意解を持つ場合は生成成功として問題を出力する。一意解を持たない場合は入れ替え段階に進む。

# 3.3.2. 入れ替え段階

入れ替え段階として、ある初期配置マスの数字を別の 数字に入れ替えることを繰り返す. それぞれの初期配置 マスを順番に選び、選んだマスの数字と初期配置マスで ないマスの数字を全て消去し、改めて解き進める、そし て、選んだマスに元の数字以外の候補数字が残った場合、 それらの候補数字を順に入れて解き進める. その盤面の 評価値を計算し、元の盤面の評価値よりも良い場合、元 の数字から今の数字に入れ替える. ここで, 座間らは評 価値として盤面のまだ埋まっていないマスの数(空きマス 数)や、まだ埋まっていないマスの候補数字の数の2乗和 (候補数字数)の少なさを用いている. 完成盤面では空き マス数も候補数字数も 0 であるため、この値を最小化す るように数字を入れ替えれば完成に近づけることができ る. 以上の処理を繰り返し、一意解を持つ問題となれば 生成成功として問題を出力する. すべての初期配置マス について有効な入れ替え数字が無かった場合, 生成失敗 として生成段階からやり直す.

#### 4. 提案手法

# 4.1. 難易度の基準

本研究では、明確な難易度を定義せず、評価する問題が問題集における指定難易度の問題と統計的に近いほど、 指定難易度の問題として適切であると判定する.

#### 4.1.1. 概要

適切さとは、数独の問題に対して指定された難易度の問題としてどれほど適切なのかを表す数値である。問題集の問題の解法適用レベルとステップ数を計測し、各難易度における2つの値の分布が2変数正規分布の形になっているとして式を定義し、この式の0~1の計算結果を問題の適切さとする。この値がしきい値0.7を超える場合、その問題は指定難易度の問題であると判定する。

表1 推論規則のレベルと難易度

複雑さ	難易度	名称
1	初級	Hidden Single (ブロック)
2	中級	Locked Candidates-P
3	中級	Hidden Single (行,列)
4	上級	Hidden Pair (ブロック)
5	上級	Locked Candidates-C
6	上級	Naked Single
7	上級	X-wing
8	超上級	Hidden Pair (行,列)
9	超上級	Hidden Triple
10	超上級	Hidden Quadraple
11	超上級	Naked Pair
12	超上級	Naked Triple
13	超上級	Naked Quadraple

まず,推論規則の複雑さを定義する.本研究ではニュリの難易度評価を基準にする.ニコリは数独の解き方として推論規則を初級,中級,上級に分けて動画の形で紹介している.本研究では13個の推論規則に対してそれぞれの動画での紹介順に複雑さを定義する.動画内で紹介

されていない一部の推論規則はさらに複雑な推論規則とする。表 1 のように推論規則に複雑さを割り振った。難易度は紹介された動画の級を表す。なお、Hidden Single、Hidden Pair という 2 つの推論規則はそれぞれ 2 つに分けている。本研究でも、難易度を初級、中級、上級、超上級の 4 つに分ける。

#### 4.1.2. 定義

本研究では, 難易度に対する問題の適切さを定義する データとして、ニコリの数独名品集 [4]の問題を用いる. 100 問全ての問題の解法適用レベルとステップ数を計算 し、設定されている難易度毎にそれぞれの平均と標準偏 差,2つの尺度の相関係数を計算した.その結果を表2に まとめる.  $\mu_L$ ,  $\sigma_L$ は解法適用レベルの平均と標準偏差,  $\mu_S$ と $\sigma_S$ はステップ数の平均と標準偏差、 $\rho$ は2つの尺度の 相関係数を表す. なお、設定されている難易度は 4 種類 であったため、本研究における呼称に変換している. こ こで、初級の問題は全て解法適用レベルが 1 であったた め、解法適用レベルの標準偏差が 0 となり、相関係数は 定義できない. そのため, 難易度「やさしい」に関して は、解法適用レベルが 1 の推論規則のみを使って生成す るという前提の下で、評価値としてステップ数の 1 次元 正規分布を用いる. 各難易度のデータを 1 次元正規分布 や 2 次元正規分布の式に代入し、式を整理すると以下の ようになる.

$$f_1(S) = \exp(-0.0292(S - 14.5)^2)$$

$$f_2(L, S) = \exp(-1.13(L - 2.29)^2 - 0.0274(S - 27.2)^2 + 0.194(L - 2.29)(S - 27.2))$$

$$f_3(L, S) = \exp(-0.478(L - 3.78)^2 - 0.0172(S - 32.5)^2 + 0.000737(L - 3.78)(S - 32.5))$$

$$f_4(L,S) = \exp(-0.148(L - 5.54)^2 - 0.0209(S - 32.6)^2 + 0.0182(L - 5.54)(S - 32.6))$$

 $f_1 \sim f_4$ はそれぞれ初級、中級、上級、超上級の適切さの評価値を表し、L、Sはそれぞれ解法適用レベルとステップ数を表す。また、評価値を  $0 \sim 1$  の値にするために 2次元正規分布の式の規格化定数の部分は消去している。生成するときは指定された難易度の式に盤面の解法適用レベルとステップ数を代入することで適切さを評価する.

	初級	中級	上級	超上級
問題数	27	28	32	13
$\mu_L$	1.000	2.286	3.781	5.538
$\mu_S$	14.52	27.18	32.53	32.62
$\sigma_{\!\scriptscriptstyle L}$	0.000	0.7954	1.023	1.865
$\sigma_{\!S}$	4.140	5.113	5.397	4.954
ρ	-	0.5494	0.004070	0.1639

表 2 各難易度の平均と標準偏差と相関係数

## 4.2. 数独生成手法

難易度と初期配置を入力として座間らの手法を基礎に 生成する。生成段階では適切さを最大化するように数字 を配置し、入れ替え段階では最終的に適切と判断される ことを目標に余裕を持たせて数字を入れ替える。まず、 生成段階で評価値を適切さとして生成する。ここで、石 田らは解法適用レベルとステップ数を、完成盤面に対し て使用していたが、提案手法では生成途中の盤面に対し て使用する. そのため、全ての推論規則を適用しても盤面が変化しなくなった場合、その時点での 2 つの尺度を用いる. また、座間らの手法では初期配置の各候補数字について配置して解き進めた際に矛盾が発生した場合はその候補数字を消し、これにより候補数字が無くなるマスが出現した場合は生成を始めからやり直していた. 提案手法では、数字配置を再帰的な処理にする. あるマスの候補数字が全て消去された場合は、1 つ前の盤面に戻る. 矛盾なく初期配置マスが埋まり、一意解を持つ場合は生成成功として出力する. ただし、適切でないと判定される場合は生成段階の初めからやり直す. 一意解を持たない場合は入れ替え段階に進む.

次に、入れ替え段階で適切さを評価値として初期配置 マスの数字を入れ替えていく. ここで,変更前の盤面が 適切な難易度であると判断される場合、変更後の盤面が 不適切な難易度になる場合を除いて自由に変更可能とす る. 理由としては、完成直前の盤面の適切さが完成盤面 の適切さを上回っていた場合、たとえ完成盤面が適切な 難易度と判断されているとしても変更不可と判断してし まうことがあるためである. ただし, 数字を変更する際 は空きマス数が減る変更であることを前提とする. 空き マス数が増える変更を許すと, 適切な難易度と判定され るが未完成の盤面同士で相互に遷移し続けて終了しなく なることがあるためである. 座間らの手法では評価値が 向上する変更が存在しない場合は生成を始めからやり直 していたが、提案手法では数字変更を再帰的処理にする. 理由としては、本研究では座間らの手法と比較して適切 さが増えることという条件が増えているため,変更可能 なマスが存在しない状況がより多く出現する. そのため, 再帰的な処理にすることで頻繁に生成が始めからになる ことを防いでいる. 再帰的にすべての入れ替えを試して も一意解を持つ問題にならなかった場合、生成失敗とし て生成を始めからやり直す.

# 5. 実装

提案手法を C++で実装した. 初期配置と難易度を指定することで, 数独の問題を生成する. コード上では先行研究の手法と提案手法を生成段階, 入れ替え段階でそれぞれ選ぶことができる. また, 生成された問題をPC上で解くことができるプログラムを C#で制作した(図 1).



図1 数独解答ソフト

#### 6. 実験

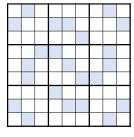
ヒントとなる数字の数が23個である図2左の初期配置 に対して、初級・中級・上級・超上級それぞれ 25 問ずつ、 合計 100 問の問題を生成した.表 3 に結果を示す.一致 率は生成した問題のうち適切さが 0.7 より大きい問題の 確率を表し、生成時間はそれぞれの指定難易度の問題の 平均である. また, 図 2 左の初期配置に初期配置マスを 4つ増やした図2右の初期配置についても同様に問題を生 成した. 結果を表 4 に示す. ここで, 生成した問題の例 として、図2左の初期配置に対して生成した2つの問題 を示す. 図3左は難易度として超上級を指定した問題で, 解法適用レベルが 6, ステップ数が 34 である. つまり, 複雑さが Rocked Candidates-C 以下の推論規則のみでは解 くことができず、Naked Single 以上の推論規則を使えば解 くことができる.一方,図3右は初級を指定して生成し た問題で、解法適用レベルが 1, ステップ数が 17 である. つまり、Hidden Single (ブロック)のみで解くことができ

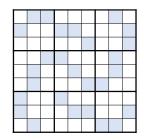
指定難易度 生成問題数 生成時間[秒] -致率[%] 25 初級 96 10.64 中級 25 32 25.39 25 上級 68 10.92 25 24 22.65 超上級 100 55 17.39 計

表3 1つ目の初期配置での実験結果

表 4 2	2つ目	の初期配置゛	での実験結果
-------	-----	--------	--------

指定難易度	生成問題数	一致率[%]	生成時間[秒]
初級	25	96	0.7131
中級	25	80	9.430
上級	25	36	18.52
超上級	25	16	14.78
計	100	57	10.86





2

1

4

図2 実験で用いた初期配置

	9						6			9						
8			1	4				2	8			7	6			
					2									3		
		9	3				7				7	3				Γ
	5			1			3			6			9			Γ
	6				7	9				4				2	5	
			7									8				
7				2	9			5	2				4	9		
	4						8			5						

図3 生成した問題(左:超上級,右:初級)

# 7. 議論

表3より、図2左の初期配置に対して、上級の問題は68%の精度、11秒程度の平均時間で生成できた。また、中級の問題は一致率が32%、平均生成時間も25秒程度にとどまった。一方、表4より、図2右の初期配置に対しては、逆に中級の問題が80%の精度、平均9秒程度で生成でき、上級の問題が36%の精度、平均19秒程度にとどまった。この結果より、初期配置と難易度の組み合わせによって生成しにくい場合もあるが、適切な組み合わせであれば十分な精度と速度で問題を生成できるといえる。

どちらの初期配置でも初級の問題の一致率は高い理由を考察する.適切さを高めるためには、2 つの尺度の値それぞれを適切な値に近づける必要がある.しかし、初級の問題は推論規則を 1 種類のみ使用するため、実質的にステップ数のみを適切な値に近づけることで生成ができる.つまり、他の難易度より適切な問題が生成されやすいため、初級の問題はどのような初期配置に対しても一致率が高くなる傾向があると考えられる.

提案手法の入れ替え段階において、生成された問題が 指定難易度でない場合は生成成功としない、という処理 を追加すれば一致率を確実に 100%にすることは可能で ある. しかし、この処理を追加すると、生成速度が落ち るだけでなく、指定された初期配置と難易度の問題が存 在しない場合、プログラムが終了しなくなってしまう. そのため、本研究では現在の実装にしている.

#### 8. 今後の課題

どのような初期配置と難易度の組み合わせが生成しやすいのかが未だ不明である.適切な組み合わせを明確に定義できればより実用性が生まれると考える.また,本研究では難易度評価をニコリの問題集 [4]を基準に統計的に定義したが,数独問題の難易度を厳密に定義できれば,提案手法に組み込むことでより正確な難易度の問題を生成することが可能であると考える.また,名品とされる数独の問題には数字が順番に並ぶように配置されている問題が多く見られる.自動生成される数独の問題でも同様に数字が順番に並んだ問題を生成できれば,数独問題としての完成度をさらに高めることができると考える.

#### 文 献

- [1] 座間翔, 篠埜功, "初期配置が指定された場合における 高難易度数独問題の自動生成手法の提案および実 装," 情報処理学会研究報告:ゲーム情報学, vol. 37, no. 7, pp. 1-12, 2017.
- [2] 石田伸輔, 岩波拓, 高瀬治彦, 北英彦, 林照峯, "数独問題を評価するための指標に関する一考察," 情報科学技術フォーラム論文集, vol. 6, no. 2, pp. 437-438, 2007.
- [3] "Hodoku: Human Style Solving Techniques for Sudoku," [Online]. Available: https://hodoku.sourceforge.net/en/techniques.php. [Accessed 11 1 2022].
- [4] ニコリ, ニコリ「数独」名品 100選, 文藝春秋, 2019.